УДК 515.125

Ю. Л. Ершов

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛУТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛУРЕШЕТОК. II

Настоящая статья является продолжением работы [1], знакомство читателя с которой предполагается, и мы будем без пояснений пользоваться введенными там понятиями и обозначениями.

В [1] для полутопологической полурешетки $\mathbb{S} = \langle S, \vee, T\rangle$ была введена естественная топология $T^\pi \subseteq T$ такая, что $\mathbb{S}^\pi \rightleftharpoons \langle S, \vee, T^\pi\rangle$ – топологическая полурешетка и $Spec\ \mathbb{S} = Spec\ \mathbb{S}^\pi$. Эта топология определяется предбазисом $\{S \setminus P \mid P \in Spec\ \mathbb{S}\}$ и обладает рядом хороших свойств. В данной статье мы введем еще одну топологию $T^\varphi \supseteq T^\pi$, также обладающую многими хорошими свойствами.

Пусть $\mathbb{S} = \langle S, \vee, T\rangle$ – полутопологическая полурешетка, $\Phi \subseteq S$ – фильтр в полурешетке $\langle S, \vee\rangle$. Назовем фильтр Φ *φ-открытым* в $\mathbb{S} = \langle S, \vee, T\rangle$, если выполнено следующее свойство: *если $D \subseteq S$ – такое направленное* (*в* $\langle S, \leq\rangle$) *подмножество, что $\Phi \cap P \neq \varnothing$ для любого $P \in Spec\ \mathbb{S}$, содержащего D, то $D \cap \Phi \neq \varnothing$.*

Примером φ-открытого фильтра является всякий фильтр вида $S \setminus P$ для $P \in Spec\ \mathbb{S}$.

Лемма 1. *Если Φ_0 и Φ_1 – φ-открытые фильтры, то $\Phi_0 \cap \Phi_1$ – также φ-открытый фильтр.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что $\Phi_0 \cap \Phi_1$ является фильтром в $\langle S, \vee\rangle$. Если $\sigma_0 \in \Phi_0$, $\sigma_1 \in \Phi_1$, то $\sigma_0 \vee \sigma_1 \in \Phi_0 \cap \Phi_1$, т. е. $\Phi_0 \cap \Phi_1 \neq \varnothing$. Пусть $\sigma_0, \sigma_1 \in \Phi_0 \cap \Phi_1$; так как Φ_0 и Φ_1 – фильтры, существуют $\sigma \in \Phi_0$ и $\sigma' \in \Phi_1$ такие, что $\sigma \leq \sigma_0, \sigma_1$ и $\sigma' \leq \sigma_0, \sigma_1$. Но тогда $\sigma \vee \sigma' \in \Phi_0 \cap \Phi_1$ и $\sigma \vee \sigma' \leq \sigma_0, \sigma_1$.

Пусть $D \subseteq S$ – направленное подмножество и для любого $P \in Spec\ \mathbb{S}$ такого, что $P \cap D \neq \varnothing$, имеет место $P \cap (\Phi_0 \cap \Phi_1) \neq \varnothing$. Тогда из φ-открытости фильтров Φ_0 и Φ_1 следует, что $\Phi_0 \cap D \neq \varnothing$, $\Phi_1 \cap D \neq \varnothing$. Пусть $\sigma_0 \in \Phi_0 \cap D$, $\sigma_1 \in \Phi_1 \wedge D$. Так как D направленно, то существует элемент $\sigma \in D$ такой, что $\sigma \geq \sigma_0, \sigma_1$; но тогда $\sigma \in \Phi_0 \cap D$, $\sigma \in \Phi_1 \cap D$ и $\sigma \in (\Phi_0 \cap \Phi_1) \cap D$, т. е. $\Phi_0 \cap \Phi_1$ есть φ-открытый фильтр.

Зададим топологию T^{φ} на $\langle S, \vee\rangle$ базисом $\{\Phi \mid \Phi$ – φ-открытый фильтр в $\mathbb{S}\}$. Из этого определения и замечания выше следует, что $T^{\pi} \subseteq T^{\varphi}$.

Для изучения топологии T^{φ} решающим является следующее предложение, использующее гомоморфизм $\mu : \langle S, \vee\rangle \longrightarrow \langle T_*, \cup\rangle$, определенный в [1].

Предложение 1. i) *Если Φ_* – собственный открытый фильтр в $\langle T_*, \cup, T_{dk}\rangle$, то $\Phi \rightleftharpoons \mu^{-1}(\Phi_*)$ – φ-открытый фильтр в $\mathbb{S}$;*

ii) *для всякого фильтра Φ, открытого в топологии T^{φ} (T^{φ}-открытого фильтра), семейство $\Phi^* \rightleftharpoons \{U \mid U \in T_*,\ \exists\sigma \in \Phi(V_\sigma \subseteq U)\}$ является открытым фильтром в $\langle T_*, \cup, T_{dk}\rangle$ и $\Phi = \mu^{-1}(\Phi^*)$.*

Доказательство. Докажем утверждение «i». Пусть Φ_* ($\neq T_* \Longleftrightarrow \varnothing \notin \Phi_*$) – открытый фильтр в $\langle T_*, \cup, T_{dk}\rangle$, $\Phi \rightleftharpoons \mu^{-1}(\Phi_*)$. Проверим, что Φ является фильтром в $\langle S, \vee\rangle$; для этого достаточно установить конаправленность Φ. Пусть $\sigma_0, \sigma_1 \in \Phi$, тогда $V_{\sigma_1} = \mu(\sigma_0)$, $V_{\sigma_1} = \mu(\sigma_1) \in \Phi_*$ и $\varnothing \neq V_{\sigma_0} \cap V_{\sigma_1} \in \Phi_*$, так как Φ_* – собственный фильтр в $\langle T_*, \cup\rangle$. По лемме 1 «ii» из [1]

$$V_{\sigma_0} \cap V_{\sigma_1} = \bigcup\{V_\sigma \mid \sigma \leq \sigma_0, \sigma_1\}$$

и семейство $\{V_\sigma \mid \sigma \leq \sigma_0, \sigma_1\}$ (как и семейство $\{\sigma \mid \sigma \leq \sigma_0, \sigma_1\}$) является направленным. Так как семейство Φ_* T_{dk}-открыто, то существует элемент $\sigma \leq \sigma_0, \sigma_1$ такой, что $V_\sigma \in \Phi_*$; тогда $\sigma \in \Phi$ и Φ конаправленно.

Покажем, что Φ является φ-открытым. Пусть $D \subseteq S$ – направленное множество такое, что $\Phi \cap P \neq \varnothing$ для любого $P \in Spec\ \mathbb{S}$, содержащего D. Положим $U_D \rightleftharpoons \bigcup\{V_\sigma \mid \sigma \in D\}$, тогда $U_D \in T_*$.

Априори возможны два случая.

Случай 1. $U_D \in \Phi_*$. Так как $\Phi_* \in T_{dk}$ и семейство $\{V_\sigma \mid \sigma \in D\}$ направленно, то существует $\sigma \in D$ такой, что $\mu(\sigma) = V_\sigma \in \Phi_*$ и $\sigma \in D \cap \Phi (= \mu^{-1}(\Phi_*))$, что и нужно.

Случай 2. $U_D \notin \Phi_*$. Так как $\langle T_*, \cup\rangle$ – дистрибутивная (полу)решетка, то по лемме 12 из [1] найдется T_{dk}-открытый простой фильтр $\Phi^* \supseteq \Phi_*$ такой, что $U_D \notin \Phi^*$. По доказанному выше $\Phi' \rightleftharpoons \mu^{-1}(\Phi^*)$ является фильтром в $\langle S, \vee\rangle$, а $P' \rightleftharpoons S \setminus \Phi' = \mu^{-1}(T_* \setminus \Phi^*)$ есть идеал в $\langle S, \vee\rangle$. Следовательно, P' – простой идеал в $\langle S, \vee\rangle$. Так как $\Phi^* \in T_\pi$, то непрерывность гомоморфизма $\mu : \langle S, T^{\pi}\rangle \longrightarrow \langle T_*, T_\pi\rangle$ (см. [1, предложение 1]) показывает, что Φ' есть T^{π}-открытый фильтр (следовательно, и T-открытый фильтр). Отсюда $P' \in Spec\ \mathbb{S}$. Без труда проверяется, что условие $U_D \notin \Phi^*$ влечет, что $P' \supseteq D$ и $P' \cap \Phi = \varnothing$, но это противоречит предположению. Таким образом, случай 2 невозможен.

Итак, Φ – φ-открытый фильтр.

Докажем утверждение «ii». Рассмотрим сначала случай, когда Φ – φ-открытый фильтр. Семейство $\Phi^* \rightleftharpoons \{U \mid U \in T_*, \exists\sigma \in \Phi(V_\sigma \subseteq V)\}$ является фильтром в $\langle T_*, \vee\rangle$ для (любого) фильтра Φ. Проверим, что $\Phi^* \in T_{dk}$. Пусть $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ – направленное семейство элементов T_* такое, что множество $U \rightleftharpoons \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \Phi^*$. Рассмотрим множество $D \rightleftharpoons \{\sigma \mid \sigma \in S,\ \exists\lambda \in \Lambda\ (V_\sigma \subseteq U_\lambda)\}$. Нетрудно видеть, что D – направленное подмножество в S и $U = \bigcup\limits_{\sigma\in D} V_\sigma$.

Априори возможны два случая.

Случай 1. $D \cap \Phi \neq \varnothing$. Пусть $\sigma \in D \cap \Phi$, тогда существует $\lambda \in \Lambda$ такое, что $V_\sigma \subseteq U_\lambda$; но тогда $V_\lambda \in \Phi^*$, что и нужно.

Случай 2. $D \cap \Phi = \varnothing$. Так как Φ – φ-открытый фильтр, то существует $P \in \mathit{Spec}\ \mathbb{S}$ такой, что $P \supseteq D$ и $P \cap \Phi = \varnothing$.

Рассмотрим два возможных подслучая.

Подслучай 2.1. $P \in V$; так как $U = \bigcup\limits_{\sigma\in D} V_\sigma$, то существует $\sigma \in D$ такой, что $P \in V_\sigma$, $\sigma \notin P$; это влечет, что $P \not\supseteq D$, противоречие.

Подслучай 2.2. $P \notin U$. Так как $U \in \Phi^*$, то существует $\sigma \in \Phi$ такой, что $V_\sigma \subseteq U$. Тогда $P \notin V_\sigma$ влечет, что $\sigma \in P$; тем самым $\sigma \in P \cap \Phi$, что противоречит условию $P \cap \Phi = \varnothing$.

Итак, случай 2 невозможен и $\Phi^* \in T_{dk}$. Проверим, что $\Phi = \mu^{-1}(\Phi^*)$. Включение $\Phi \subseteq \mu^{-1}(\Phi^*)$, очевидно, следует из определения Φ^*. Докажем обратное включение. Пусть $\sigma \in \mu^{-1}(\Phi^*)$, т. е. $V_\sigma \in \Phi^*$; тогда существует элемент $\sigma' \in \Phi$ такой, что $V_{\sigma'} \subseteq V_\sigma$. Тогда $V_\sigma = V_{\sigma\vee\sigma'}$ и $\sigma \vee \sigma' \in \Phi$ и для любого $P \in \mathit{Spec}\ \mathbb{S}$ выполняется условие $\sigma \in P \iff \sigma \vee \sigma' \in P$. Если в качестве D взять множество $\{\sigma\}$, то для любого $P \in \mathit{Spec}\ \mathbb{S}$ выполняется условие $\sigma \in P \Rightarrow \sigma \vee \sigma' \in P$ и, следовательно, $P \cap \Phi \neq \varnothing$. Но так как Φ есть T^φ-открытый фильтр, то $D \cap \Phi \neq \varnothing$, т. е. $\sigma \in \Phi$ и равенство $\Phi = \mu^{-1}(\Phi^*)$ установлено.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть Φ – фильтр в $\langle S, \vee\rangle$, открытый в топологии T^φ. Тогда $\Phi = \bigcup\{\Phi' \mid \Phi'$ – φ-открытый фильтр, $\Phi' \subseteq \Phi\}$. По доказанному выше $\Phi = \bigcup\{\mu^{-1}((\Phi')^*) \mid \Phi'(\subseteq \Phi)$ – φ-открытый фильтр$\}$ и, следовательно, $\Phi = \bigcup\{\mu^{-1}(\Phi^*) \mid \Phi^*$ – открытый фильтр в $\langle T_*, \vee, T_{dk}\rangle$ такой, что $\mu^{-1}(\Phi^*) \subseteq \Phi\}$. Пусть $\Phi^+ \rightleftharpoons \bigcup\{\Phi_* \mid \Phi_*$ – открытый фильтр в $\langle T_*, \cup, T_{dk}\rangle$ такой, что $\mu^{-1}(\Phi_*) \subseteq \Phi\}$. Тогда $\Phi^+ \in T_{dk}$ и $\mu^{-1}(\Phi^+) = \Phi$.

Проверим, что Φ^+ является фильтром в $\langle T_*, \cup\rangle$. Установим сначала равенство $\Phi^+ = \Phi^* \rightleftharpoons \{U \mid U \in T_*,\ \exists\sigma \in \Phi(V_\sigma \subseteq U)\}$. Включение $\Phi^+ \supseteq \Phi^*$ очевидно. Докажем обратное включение. Пусть $U \in \Phi^+$; тогда существует фильтр $\Phi_* \in T_{dk}$ в $\langle T_*, \vee\rangle$ такой, что $U \in \Phi^*$ и $\mu^{-1}(\Phi_*) \subseteq \Phi$. Рассмотрим семейство $\{V_\sigma \mid \sigma \in S,\ V_\sigma \subseteq U\}$. Так как это семейство направленно и его объединение есть U, то найдется $\sigma \in S$ такой, что $V_\sigma \subseteq U$ и $V_\sigma \in \Phi_*$. Но тогда $\mu(\sigma) = V_\sigma \in \Phi_*$ и $\sigma \in \mu^{-1}(\Phi_*) \subseteq \Phi$; следовательно, $U \in \Phi^*$. Итак, $\Phi^+ = \Phi^*$. Проверим, что $\Phi^*(= \Phi^+)$ является фильтром в $\langle T_*, \cup\rangle$. Пусть $U_0, U_1 \in \Phi^*$ и $\sigma_0, \sigma_1 \in \Phi$ таковы, что $V_{\sigma_0} \subseteq U_0$, $V_{\sigma_1} \subseteq U_1$ и $V_{\sigma_0} V_{\sigma_1} \in \Phi^*$. Так как $U_0 \cap U_1 \supseteq V_{\sigma_0} \cap V_{\sigma_1}$ и $V_{\sigma_0} \cap V_{\sigma_1} = \bigcup\{V_\sigma \mid \sigma \leq \sigma_0, \sigma_1\}$ (см. [1, лемма 1 (ii)]), то условие $\Phi^* \in T_{dk}$ и направленность семейства $\{V_\sigma \mid \sigma \leq \sigma_0, \sigma_1\}$ влекут существование $\sigma \leq \sigma_0, \sigma_1$ такого, что $V_\sigma \in \Phi^*$. Из равенства $\Phi = \mu^{-1}(\Phi^*)$ следует, что $\sigma \in \Phi$. Тогда включения $U_0 \cap U_1 \supseteq V_{\sigma_0} \cap V_{\sigma_1} \supseteq V_\sigma$ влекут, что $U_0 \cap U_1 \in \Phi^+ = \Phi^*$. Итак, Φ^* ($\in T_{dk}$) является фильтром.

Следствие 1. *Пусть $\varnothing \neq \Phi \subseteq S$, тогда следующие условия эквивалентны:*

1) Φ – *φ-открытый фильтр в $\mathbb{S}$;*

2) Φ – *фильтр, открытый в топологии T^φ;*

3) $\Phi^* \rightleftharpoons \{U \mid U \in T_*,\ \exists\sigma \in \Phi(V_\sigma \leq U)\}$ *является открытым фильтром в $\langle T_*, \cup, T_{dk}\rangle$ и $\Phi = \mu^{-1}(\Phi^*)$;*

4) *существует открытый фильтр Φ_* в $\langle T_*, \cup, T_{dk}\rangle$ такой, что $\Phi = \mu^{-1}(\Phi_*)$.*

Доказательство. Импликации 1) $\Longrightarrow$ 2), 3) $\Longrightarrow$ 4) очевидны. Импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) – это утверждение «ii» предложения 1. Импликация 4) $\Longrightarrow$ 1) – это утверждение «i» предложения 1.

В доказательстве утверждения «i» предложения 1 (случай 1), по существу, установлено

Следствие 2. *Если $P_* \in Spec\ \langle T_*, \cup, T_{dk}\rangle$ $(= Spec\ \langle T_*, \cup, T_\pi\rangle)$, то $\mu^{-1}(P_*) \in Spec\ \mathbb{S}$ и $\mu^{-1}(T_* \setminus P_*)$ – φ-открытый простой фильтр.*

Предложение 2. *Система $\mathbb{S}^\varphi \rightleftharpoons \langle S, \cup, T^\varphi\rangle$ является полутопологической полурешеткой и $Spec\ \mathbb{S}^\varphi = Spec\ \mathbb{S} = Spec\ \mathbb{S}^\pi$.*

Доказательство. Пусть Φ – базисное открытое множество в топологии T^φ, т. е. Φ – φ-простой фильтр в $\mathbb{S}$. Далее, пусть

$$\Phi^* \rightleftharpoons \{U \mid U \in T_*,\ \exists\sigma \in \Phi\ (V_\sigma \subseteq U)\};$$

тогда по предложению 1 «ii» Φ^* – открытый фильтр в $\langle T_*, \cup, T_{dk}\rangle$ и $\Phi = \mu^{-1}(\Phi^*)$. Проверим, что $\Sigma_\sigma^{-1}(\Phi) = \mu^{-1}(\Sigma_{V_\sigma}^{-1}(\Phi^*))$. Действительно, для любого $\sigma' \in S$ имеем эквивалентности

$$\sigma' \in \Sigma_\sigma^{-1}(\Phi) \Longleftrightarrow \sigma \vee \sigma' \in \Phi \Longleftrightarrow \mu(\sigma \vee \sigma') = V_{\sigma\vee\sigma'} \in \Phi^* \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow V_\sigma \cup V_{\sigma'} (= V_{\sigma\vee\sigma'}) \in \Phi^* \Longleftrightarrow \mu(\sigma')(= V_{\sigma'}) \in \Sigma^{-1}_{V_\sigma}(\Phi^*) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \sigma' \in \mu^{-1}(\Sigma^{-1}_{V_\sigma}(\Phi^*)).$$

Заметим теперь, что если $\sigma \notin \Phi$, то $\Sigma^{-1}_{V_\sigma}(\Phi^*)$ – собственный открытый фильтр в $\langle T_*, \cup, T_{dk}\rangle$ (см. [1, лемма 1.1]). (Если $\sigma \in \Phi$, то $\Sigma^{-1}_\sigma(\Phi) = S$.) Тогда по предложению 1 «i» $\Sigma^{-1}_\sigma(\Phi) = \mu^{-1}(\Sigma^{-1}_{V_\sigma}(\Phi^*))$ – φ-открытый фильтр в $\mathbb{S}$. Итак, отображение Σ^{-1}_σ непрерывно в топологии T^φ для любого $\sigma \in S$; следовательно, $\mathbb{S}^\varphi$ – полутопологическая полурешетка.

Так как $T^\pi \subseteq T^\varphi$, то $Spec\ \mathbb{S} = Spec\ \mathbb{S}^\pi \subseteq Spec\ \mathbb{S}^\varphi$. Пусть $P \in Spec\ \mathbb{S}^\varphi$; тогда $\Phi \rightleftharpoons S \setminus P$ – T^φ-открытый фильтр в $\mathbb{S}$. Покажем, что $P \in Spec\ \mathbb{S}$. Подмножество P является направленным в S. Пусть $P' \in Spec\ \mathbb{S}$ и $P' \supseteq P$. Если $P' \neq P$, то $P' \cap \Phi = P' \cap (S \setminus P) \neq \varnothing$. Следовательно, если $P \notin Spec\ \mathbb{S}$, то $P' \cap \Phi \neq \varnothing$ для любого $P' \in Spec\ \mathbb{S}$ такого, что $P \subseteq P'$. Так как Φ – φ-открытый фильтр, то должно быть $P \cap \Phi \neq \varnothing$, что невозможно ($\Phi = S \setminus P$). Противоречие; следовательно, $P \in Spec\ \mathbb{S}$ и $Spec\ \mathbb{S}^\varphi = Spec\ \mathbb{S}$.

Замечание. Если T – топология на некотором множестве X, $\mathbb{S} = \langle T, \cup, T_{dk}\rangle$, то $(T_{dk})^\varphi = T_\varphi$, $\mathbb{S}^\varphi = \langle T, \cup, T_\varphi\rangle$.

Покажем теперь, что для полутопологической полурешетки $\mathbb{S}^\varphi$ справедлива абстрактная версия теоремы Хофманна–Мислова.

Установим сначала более общий факт. Фильтр Φ полурешетки $\langle S, \vee\rangle$ назовем *стабильным*, если $\Sigma^{-1}_\sigma(\Phi)$ является фильтром для любого $\sigma \in S \setminus \Phi$ (если $\sigma \in \Phi$, то $\Sigma^{-1}_\sigma(\Phi) = S$!).

Справедливы следующие факты о стабильных фильтрах:

1. *Всякий простой фильтр является стабильным.*

Это следует из леммы 5 в [1].

2. *Если Φ – стабильный фильтр, $\sigma \in S \setminus \Phi$, то $\Sigma^{-1}_\sigma(\Phi)$ – стабильный фильтр.*

Действительно, если $\sigma' \notin \Sigma^{-1}_\sigma(\Phi)$, то $\sigma \vee \sigma' \notin \Phi$ и $\Sigma^{-1}_{\sigma\vee\sigma'}(\Phi) = \Sigma^{-1}_{\sigma'}\ (\Sigma^{-1}_\sigma(\Phi))$ является фильтром.

3. *Если Φ_0, Φ_1 – стабильные фильтры, то $\Phi_0 \cap \Phi_1$ – стабильный фильтр.*

Доказательство. Пусть $\sigma \in S \setminus (\Phi_0 \cap \Phi_1)$. Если $\sigma \notin \Phi_0$ и $\sigma \notin \Phi_1$, то

$$\Sigma^{-1}_\sigma(\Phi_0 \cap \Phi_1) = \Sigma^{-1}_\sigma(\Phi_0) \cap \Sigma^{-1}_\sigma(\Phi_1)$$

является фильтром. Если $\sigma \notin \Phi_0$ и $\sigma \in \Phi_1$, то

$$\Sigma^{-1}_\sigma(\Phi_0 \cap \Phi_1) = \Sigma^{-1}_\sigma(\Phi_0) \cap \Sigma^{-1}_\sigma(\Phi_1) = \Sigma^{-1}_\sigma(\Phi_0) \cap S = \Sigma^{-1}_\sigma(\Phi_0)$$

является фильтром. Аналогично приходим к нужному заключению в случае, если $\sigma \in \Phi_0$ и $\sigma \notin \Phi_1$.

4. *Пусть* Φ_λ, $\lambda \in \Lambda$ *– направленное семейство стабильных фильтров, тогда* $\Phi \rightleftharpoons \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Phi_\lambda$ *– стабильный фильтр.*

Доказательство. Действительно, для $\sigma \in S \setminus \Phi$ имеем $\sigma \in S \setminus \Phi_\lambda$ при всех $\lambda \in \Lambda$ и семейство $\Sigma_\sigma^{-1}(\Phi_\lambda)$ является направленным семейством фильтров, а

$$\Sigma_\sigma^{-1}(\Phi) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Sigma_\sigma^{-1}\Phi_\lambda$$

является фильтром.

5. *Если* $\langle S, \vee\rangle$ *– дистрибутивная полурешетка, то любой фильтр* Φ *в* $\langle S, \vee\rangle$ *является стабильным.*

Это лемма 11 в [1].

Оказывается, что справедливо и обращение свойства 5.

6. *Если в полурешетке* $\langle S, \vee\rangle$ *каждый главный фильтр стабилен, то полурешетка* $\langle S_\perp, \vee_\perp\rangle$ *дистрибутивна.*

Доказательство. Докажем (это равносильно утверждению 6), что если полурешетка $\langle S, \vee\rangle$ конаправленна и любой главный фильтр стабилен, то полурешетка $\langle S, \vee\rangle$ дистрибутивна. Пусть $\sigma, \sigma_0, \sigma_1 \in S$ и $\sigma \le \sigma_0 \vee \sigma_1$. Если $\sigma \le \sigma_0$, то, выбирая σ' таким, что $\sigma' \le \sigma, \sigma_1$, будем иметь $\sigma = \sigma \vee \sigma'$, $\sigma \le \sigma_0, \sigma' \le \sigma_1$; аналогично рассуждаем, если $\sigma \le \sigma_1$. Итак, будем предполагать, что $\sigma \not\le \sigma_0$ и $\sigma \not\le \sigma_1$. Имеем $\sigma_1 \in \Sigma_{\sigma_0}^{-1}(\uparrow \sigma) \supseteq \uparrow \sigma$; тогда найдется $\sigma_1' \in \Sigma_{\sigma_0}^{-1}(\uparrow \sigma)$ такой, что $\sigma_1' \le \sigma_1$ и $\sigma_1' \le \sigma$; Так как $\sigma_1' \in \Sigma_{\sigma_0}^{-1}(\uparrow \sigma)$, то $\sigma \le \sigma_0 \vee \sigma_1'$. Аналогично найдем $\sigma_0' \le \sigma_0, \sigma$ такой, что $\sigma_1' \in \Sigma_{\sigma_0}^{-1}(\uparrow \sigma)$, т. е. $\sigma \le \sigma_0' \vee \sigma_1'$, вместе с $\sigma_0', \sigma_1' \le \sigma$ имеем $\sigma = \sigma_0' \vee \sigma_1'$ и $\sigma_0' \le \sigma_0$, $\sigma_1' \le \sigma_1$.

Пусть $\mathbf{\Phi}$ – семейство стабильных фильтров такое, что $\Phi \in \mathbf{\Phi}$, $\sigma \in S \setminus \Phi$ влечет, что $\Sigma_\sigma^{-1}(\Phi) \in \mathbf{\Phi}$, и замкнутое относительно объединения линейно упорядоченных подсемейств из $\mathbf{\Phi}$ (тогда частично упорядоченное множество $\langle \mathbf{\Phi}, \subseteq\rangle$ удовлетворяет лемме Цорна). Примерами таких семейств являются семейство $\mathbf{\Phi}_r$ всех стабильных фильтров и семейство $\mathbf{\Phi}_T$ всех стабильных T-открытых фильтров, если T – топология на S такая, что $\langle S, \vee, T\rangle$ – полутопологическая полурешетка.

Предложение 3. *Пусть семейство* $\mathbf{\Phi}$ *удовлетворяет сформулированным выше условиям. Тогда любой фильтр из* $\mathbf{\Phi}$ *является пересечением некоторого семейства простых фильтров из* $\mathbf{\Phi}$*.*

Доказательство. Докажем даже больше. Пусть $\Phi \in \mathbf{\Phi}$ и I – идеал в $\langle S, \vee \rangle$ такой, что $I \cap \Phi = \varnothing$. Пусть Φ^* – максимальный элемент в $\mathbf{\Phi}$, удовлетворяющий свойствам $\Phi^* \supseteq \Phi$, $\Phi^* \cap I = \varnothing$. Проверим, что Φ^* является простым фильтром в $\langle S, \vee \rangle$ $(S \setminus \Phi^* \in \mathit{Spec}\ \langle S, \vee \rangle)$. Пусть $\sigma \in I \subseteq S \setminus \Phi^*$, тогда $\Sigma_\sigma^{-1}(\Phi^*) \in \mathbf{\Phi}$ $(\Sigma_\sigma^{-1}(\Phi^*) \subseteq \Phi^*)$. Если $\Sigma_\sigma^{-1}(\Phi^*) \neq \Phi^*$, то максимальность Φ^* влечет, что $\Sigma_\sigma^{-1}(\Phi^*) \cap I \neq \varnothing$. Пусть $\sigma' \in \Sigma_\sigma^{-1}(\Phi^*) \cap I$, тогда $\sigma \vee \sigma'$ принадлежит Φ^* и I, что противоречит условию $\Phi^* \cap I = \varnothing$. Итак, $\Sigma_\sigma^{-1}(\Phi^*) = \Phi^*$ для всех $\sigma \in I$. Пусть $\sigma \in S \setminus \Phi^*$, тогда $\Sigma_\sigma^{-1}(\Phi^*)(\supseteq \Phi^*) \in \mathbf{\Phi}$ и, если $\Sigma_\sigma^{-1}(\Phi^*) \neq \Phi^*$, то $\Sigma_\sigma^{-1}(\Phi^*) \cap I \neq \varnothing$. Пусть $\sigma' \in \Sigma_\sigma^{-1}(\Phi^*) \cap I$; тогда $\sigma \vee \sigma' \in \Phi^*$, $\sigma \in \Sigma_\sigma^{-1}(\Phi^*) = \Phi^*$; противоречие с условием $\sigma \in S \setminus \Phi^*$. Итак, $\Sigma_\sigma^{-1}(\Phi^*) = \Phi^*$ для всех $\sigma \in S \setminus \Phi^*$. Пусть $\sigma_0, \sigma_1 \in S \setminus \Phi^*$; если $\sigma_0 \vee \sigma_1 \in \Phi^*$, то $\sigma_0 \in \Sigma_{\sigma_1}^{-1}(\Phi^*) = \Phi^*$; противоречие, следовательно, $\sigma_0 \vee \sigma_1 \in S \setminus \Phi^*$. Отсюда $S \setminus \Phi^*$ является идеалом, а Φ^* является простым фильтром.

Следствием доказательства является обращение леммы 5 из [1].

Следствие 1. *Если* Φ *– фильтр полурешетки* $\langle S, \vee \rangle$ *и* $\Sigma_\sigma^{-1}(\Phi) = \Phi$ *для всех* $\sigma \in S \setminus \Phi$*, то* Φ *– простой фильтр.*

Объединяя этот факт с леммой 5 из [1], получаем интересное

Следствие 2. *Фильтр* Φ *полурешетки* $\langle S, \vee \rangle$ *является простым тогда и только тогда, когда* $\Sigma_\sigma^{-1}(\Phi) = \Phi$ *для всех* $\sigma \in S \setminus \Phi$.

Следующие два следствия – это абстрактные формы теоремы Хофманна–Мислова для полутопологических полурешеток $\mathbb{S}^\varphi$ и $\mathbb{S}^\pi$.

Следствие 3. *Всякий открытый фильтр в* $\mathbb{S}^\varphi$ *является пересечением некоторого семейства открытых простых фильтров в* $\mathbb{S}^\varphi$*.*

Для этого нужно лишь заметить, что всякий открытый фильтр Φ в $\mathbb{S}^\varphi$ является стабильным, но это, по существу, было установлено в доказательстве предложения 2.

Следствие 4. *Всякий открытй фильтр в* $\mathbb{S}^\pi$ *является пересечением некоторого семейства открытых простых фильтров в* $\mathbb{S}^\pi$*.*

Так как $T^{\pi} \subseteq T^{\varphi}$, а $Spec\ \mathbb{S}^{\pi} = Spec\ \mathbb{S}^{\varphi}$, то это вытекает из следствия 3.

Следствие 5. *Любой открытый стабильный фильтр полутопологической полурешетки $\mathbb{S} = \langle S, \vee, T\rangle$ является φ-открытым.*

Доказательство. Перед предложением 3 было замечено, что семейство $\mathbf{\Phi}_T$ всех открытых стабильных фильтров удовлетворяет условиям этого предложения. Пусть $\Phi \in \mathbf{\Phi}_T$, D – направленное подмножество в S такое, что $\Phi \cap D = \varnothing$. Пусть $I \rightleftharpoons \downarrow D$, тогда идеал I имеет пустое пересечение с Φ. Из доказательства предложения 3 следует, что существует простой идеал $I^* \supseteq I$ такой, что $I^* \cap \Phi = \varnothing$, но $I^* \supseteq I \supseteq D$. Итак, $\Phi \in \mathbf{\Phi}_T$ есть φ-открытый фильтр.

Из следствия 5 сразу вытекает

Следствие 6. *Если открытые стабильные фильтры полутопологической полурешетки $\mathbb{S} = \langle S, \vee, T\rangle$ образуют базис топологии T, то $T \subseteq T^{\varphi}$.*

Отметим без доказательства справедливость аналогов предложений 1 и 2 из [1] для топологий T^{φ} и T_{φ} вместо топологий T^{π} и T_{π} соответственно. Сформулируем их в предположении отделимости S в топологии T^{π} (что равносильно отделимости топологии T^{φ}).

Предложение 1$'$. *Гомоморфизм $\mu : \langle S, \vee\rangle \longrightarrow \langle T_*, \cup\rangle$ является гомеоморфным вложением $\langle S, T^{\varphi}\rangle$ в $\langle T_*, T_{\varphi}\rangle$.*

Предложение 2$'$. *Гомеоморфное вложение $\mu : \langle S, T^{\varphi}\rangle \longrightarrow \langle T_*, T_{\varphi}\rangle$ индуцирует наибольшее существенное расширение подмножества $\mu(S) \subseteq T_*$.*

Доказательства дословно повторяют соответствующие доказательства в [1].

В заключение статьи приведем три результата, не связанные с введенной выше топологией T^{φ}, но связанные с результатами из работы [1].

В работе [1] сформулировано без доказательства предложение 6, в котором указано элементарное условие отделимости топологии T^{π}_{ω}. Однако автор обнаружил, что в полном объеме это предложение оказалось не доказанным. Приведем здесь реально доказанную версию.

Рассмотрим следующее элементарное предложение сигнатуры $\langle \leq, \vee\rangle$:

$$\forall \sigma_0\sigma_1\sigma_2\ \exists \sigma\ ((\sigma_0 \nleq \sigma_1) \wedge (\sigma_0 \leq \sigma_1 \vee \sigma_2) \longrightarrow (\sigma \leq \sigma_0) \wedge (\sigma \leq \sigma_2) \wedge (\sigma \nleq \sigma_1)). \quad (*)$$

Предложение 4. *Пусть $\langle S, \vee\rangle$ – полурешетка, T_{ω} – дискретная топология на S. Тогда*

(i) *если S отделимо в топологии T^{π}_{ω}, то $\langle S, \vee, \leq\rangle \models (*)$;*

(ii) *если $\langle S, \vee, \leq\rangle \models (*)$ и S не более чем счетно, то S отделимо в топологии T^{π}_{ω}.*

Доказательство. Докажем утверждение (i). Пусть S отделимо в топологии T^{π}_{ω} и $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \in S$ таково, что $\sigma_0 \not\leq \sigma_1$, $\sigma_0 \leq \sigma_1 \vee \sigma_2$. Отделимость S и лемма 6 из [1] влекут существование $P \in Spec\ \langle S, \vee\rangle$ такого, что $\sigma_0 \notin P$, $\sigma_1 \in P$. Пусть $\Phi \rightleftharpoons S \setminus P$. Убедимся, что Φ является фильтром. Действительно, если $\sigma_0 \in \Phi$, $\sigma_1 \notin \Phi$ и $\sigma_0 \leq \sigma_1 \vee \sigma_2$, то $\sigma_1 \vee \sigma_2 \in \Phi$ и $\sigma_2 \in \Phi$, так как если $\sigma_2 \notin \Phi$, то $\sigma_2 \in P$ и $\sigma_1 \vee \sigma_2 \in P = S \setminus \Phi$. Итак, $\sigma_0, \sigma_2 \in \Phi$. Так как Φ является фильтром, то существует элемент $\sigma \in \Phi$ такой, что $\sigma \leq \sigma_0, \sigma_2$. Легко видеть, что $\sigma \not\leq \sigma_1$, так как $\sigma_1 \notin \Phi$. Итак, в $\langle S, \vee\rangle$ справедливо предложение $(*)$.

Докажем утверждение (ii). Пусть S удовлетворяет предложению $(*)$ и не более чем счетно. Пусть $\sigma_0, \sigma_1 \in S$ и $\sigma_0 \not\leq \sigma_1$. Найдем простой идеал $P \in Spec\ \langle S, \vee\rangle$ такой, что $\sigma_1 \in P$, $\sigma_0 \notin P$.

Зафиксируем некоторое перечисление $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$ всех элементов из S и будем строить две последовательности элементов $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots$; $\delta_0, \delta_1, \ldots \delta_n, \ldots$ элементов из S так, чтобы были выполнены следующие условия: $\tau_0 \geq \tau_1 \geq \cdots \geq \tau_n \ldots$; $\delta_0 \leq \delta_1 \leq \cdots \leq \delta_n \leq \ldots$; $\tau_n \not\leq \delta_n$, $n \in \omega$; $\tau_0 = \sigma_0$, $\delta_0 = \sigma_1$ и для любого элемента $\sigma_n \in S$, $n \in \omega$, должно быть $\sigma_n \leq \delta_n$ или $\sigma_n \geq \tau_n$. Полагаем $\tau_1 \rightleftharpoons \sigma_0$, $\delta_1 \rightleftharpoons \sigma_1$.

Предположим, что для $k \geq 1$ уже найдены элементы $\tau_0 \geq \cdots \geq \tau_k$ и $\delta_0 \leq \cdots \leq \delta_k$, удовлетворяющие условиям $\tau_n \not\leq \delta_n$ и $\sigma_n \leq \delta_n$ или $\sigma_n \geq \tau_n$ для $n \leq k$.

Итак, $\tau_k \not\leq \delta_k$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $\tau_k \leq \delta_k \vee \sigma_{k+1}$. Тогда по свойству $(*)$ найдется элемент τ_{k+1} такой, что $\tau_{k+1} \leq \tau_k, \sigma_{k+1}$ и $\tau_{k+1} \not\leq \delta_k$; полагая $\delta_{k+1} \rightleftharpoons \delta_k$, получим желаемое продолжение последовательности.

Случай 2. $\tau_k \not\leq \delta_k \vee \sigma_{k+1}$; тогда, полагая $\tau_{k+1} \rightleftharpoons \tau_k$, $\delta_{k+1} \rightleftharpoons \delta_k \vee \sigma_{k+1}$, получим желаемое продолжение последовательности.

Итак, предположим, что построение последовательностей завершено. Полагаем $P \rightleftharpoons \{\sigma \mid \exists n(\sigma \leq \delta_n)\}$, $\Phi \rightleftharpoons \{\sigma \mid \exists n(\tau_n \leq \sigma)\}$. Нетрудно проверить, что P является идеалом, Φ является фильтром и $S = P \cup \Phi$. Проверим, что $P \cap \Phi = \varnothing$, т. е. $\Phi = S \setminus P$.

Предположим, что $P \cap \Phi \neq \varnothing$. Пусть $\sigma \in P \cap \Phi$; тогда найдутся такие $k, n \in \omega$, что $\sigma \leq \delta_n$ и $\tau_k \leq \sigma$. Пусть $l = max\{k, n\}$, тогда $\sigma \leq \delta_n \leq \delta_l$, $\tau_l \leq \tau_k \leq \sigma$ и $\tau_l \leq \delta_l$, что приводит к противоречию. Итак, P – простой идеал, $\sigma_1 = \delta_0 = \delta_1 \in P$; $\sigma_0 = \tau_0 \in I$, $\sigma_0 \notin P$. Отделимость $\langle S, T^{\pi}_{\omega}\rangle$ установлена.

Замечание. Если условие отделимости является элементарным, то из доказанного будет следовать предложение 6 из [1] в полном объеме. Однако вопрос об элементарности условия отделимости остается открытым.

Пусть $\langle X, T\rangle$ – топологическое пространство. Если искать какую-либо нетривиальную топологию на T, то первое, что приходит на ум, определить топологию предбазисом, состоящим из семейств вида

$$V_\xi \rightleftharpoons \{U \mid U \in T, \xi \in V\},\ \xi \in T,$$

т. е. семейств всех открытых окрестностей фиксированных точек пространства X. Если T является трезвым пространством, то эта топология на T совпадает с топологией $T_\pi (\rightleftharpoons T_{dk}^\pi)$ и эта «наивная» топология ведет себя весьма хорошо, как показывает следующее предложение.

Пусть $\langle X, T\rangle$ – трезвое топологическое пространство, $\langle Y, T'\rangle$ – произвольное топологическое пространство.

Предложение 5. *Пусть $\gamma : \langle T, \cup, \cap\rangle \longrightarrow \langle T', \cup, \cap\rangle$ – гомоморфизм решеток, сохраняющий наименьший и наибольший элементы. Если γ является непрерывным отображением относительно T_π-топологий на T и T', то существует* (*единственное!*) *непрерывное отображение $f : Y \longrightarrow X$ такое, что $\gamma(U) = f^{-1}(U)$ для всех $U \in T$.*

Доказательство. Действительно для любого $\eta \in Y$ семейство

$$V'_\eta \rightleftharpoons \{U' \mid U' \in T',\ \eta \in U'\}$$

является T_{dk}-открытым простым фильтром, а следовательно, и T_π-открытым фильтром. Рассмотрим семейство $V = \gamma^{-1}(V'_\eta)$. По условию V является T_π-открытым фильтром, а его дополнение $T \setminus V = \gamma^{-1}(T' \setminus V'_\eta)$ является идеалом (а V'_η – простой фильтр, γ – гомоморфизм решеток). Итак, V – открытый простой фильтр в $\langle T, \cup, T_{dk}\rangle$. Так как $\langle X, T\rangle$ трезвое, то существует $\xi \in X$ такое, что $V = V_\xi$. Полагаем $f(\eta) \rightleftharpoons \xi$. Проверка того, что $\gamma(U) = f^{-1}(U)$ (следовательно, и непрерывность f), является простой рутиной.

Замечание. Справедливо, очевидно, и следующее обратное утверждение. *Если $f : Y \longrightarrow X$ – непрерывное отображение произвольных топологических пространств $\langle Y, T'\rangle$ и $\langle X, T\rangle$, то отображение $\gamma : U \longmapsto f^{-1}(U)$, $U \in T$, является гомоморфизмом решетки $\langle T, \cup, \cap\rangle$ в решетку $\langle T', \cup, \cap\rangle$, сохраняющим наименьший и наибольший элементы и являющийся непрерывным в T_π-топологиях для T и T'.*

Последний результат статьи связан с обсуждением роли топологии T в спектральной теории.

Пусть $\mathbb{S} = \langle S, \vee, T\rangle$ – полутопологическая полурешетка. В определении пространства $Spec\ \mathbb{S}$ топология T «участвует» лишь в определении множества $Spec\ \mathbb{S}$, но не в определении топологии T_*. Пусть $Spec\ S$ – это множество всех простых идеалов полурешетки $\langle S, \vee\rangle$ (или, что то же, $Spec\ S \rightleftharpoons Spec\ \mathbb{S}^d$, где $\mathbb{S}^d = \langle S, \vee, T_\omega\rangle)$, т. е. полурешетка $\langle S, \vee\rangle$ с дискретной топологией $T\omega$ на S). Можно ли описать все подсемейства $\Pi \subseteq Spec\ S$, для которых существует топология T на S такая, что $\mathbb{S}_T \rightleftharpoons \langle S, \vee, T\rangle$ – полутопологическая полурешетка и $\Pi = Spec\ \mathbb{S}_T$? Оказывается, что ответ достаточно прост.

Назовем семейство $\Pi \subseteq Spec\ S$ простых идеалов полурешетки $\langle S, \vee\rangle$ *замкнутым*, если для любого семейства $P_\lambda, \lambda \in \Lambda$ идеалов из Π такого, что $P = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \in Spec\ S$, следует, что $P \in \Pi$.

Предложение 6. *Для семейства* Π *простых идеалов полурешетки* $\langle S, \vee\rangle$ *существует топология* T *на* S *такая, что* $\mathbb{S}_T = \langle S, \vee, T\rangle$ *– полутопологическая полурешетка и* $\Pi = Spec\ \mathbb{S}_T$, *тогда и только тогда, когда семейство* Π *является замкнутым.*

Доказательство. Необходимость очевидна.

Установим достаточность. Пусть $\Pi \subseteq Spec\ S$ – замкнутое семейство простых идеалов полурешетки $\langle S, \vee\rangle$. Определим на S топологию T_Π предбазисом $B \rightleftharpoons \{S \setminus P \mid P \in \Pi\}$ и проверим, что $\mathbb{S}_{T_\Gamma} = \langle S, \vee, T_\Pi\rangle$ – полутопологическая полурешетка и $\Pi = Spec\ \mathbb{S}_{T_\Pi}$.

(Заметим, что если $\Pi = \varnothing$, то $T_\Pi = \{\varnothing, S\}$ и $Spec\ \mathbb{S}_{T_\Pi} = \varnothing$.)

Если P – простой идеал $\langle S, \vee\rangle, \sigma \in S$, то $\Sigma_\sigma^{-1}(S \setminus P) = S \setminus P$, если $\sigma \in P$, и $\Sigma_\sigma^{-1}(S \setminus P) = S$, если $\sigma \in S \setminus P$ (лемма 5 в [1]; напомним, что $\Sigma_\sigma(\sigma') \rightleftharpoons \sigma \vee \sigma'$).

Отсюда сразу следует, что $\mathbb{S}_{T_\Pi}$ – полутопологическая полурешетка.

Из определения сразу следует, что $\Pi \subseteq Spec\ \mathbb{S}_{T_\Pi}$. Для доказательства обратного включения установим следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть* $I, I_0, \ldots, I_n$ *– идеалы полурешетки* $\langle S, \vee\rangle$ *и* $I \subseteq \bigcup\limits_{i\le n} I_i$; *тогда существует* $i \le n$ *такое, что* $I \subseteq I_i$.

Доказательство. Предположим противное; пусть $I \nsubseteq I_i$ для всех $i \le n$. Выберем $\sigma_i \in I \setminus I_i$, $i \le n$, и положим $\sigma \rightleftharpoons \bigvee\limits_{i\le n} \sigma_i$. Тогда $\sigma\ (\ge \sigma_i) \notin I_i$, $i \le n$, $\sigma \notin \bigcup\limits_{i\le n} I_i$, но $\sigma \in I$. Это противоречит включению $I \subseteq \bigcup\limits_{i\le n} I_i$.

Пусть P – простой идеал полурешетки $\langle S, \vee \rangle$, замкнутый в топологии T_Π. Тогда $S \setminus P \in T_\Pi$ и $S \setminus P$ является объединением базисных открытых множеств, имеющих вид $\bigcap\limits_{i \leq n} (S \setminus P_i),\ P_0, \ldots, P_n \in \Pi$. Если $\bigcap\limits_{i \leq n} (S \setminus P_i),\ \subseteq S \setminus P$, то $P \subseteq \bigcup\limits_{i \leq n} P_i$ и по лемме $P \subseteq P_i,\ S \setminus P_i \subseteq S \setminus P$ для подходящего $i \leq n$. Поэтому $S \setminus P$ представимо в виде $S \setminus P = \bigcup \{S \setminus P' \mid P' \in \Pi,\ P \subseteq P'\}$; но тогда $P = \bigcap \{P' \mid P' \in \Pi,\ P \subseteq P'\}$ и $P \in \Pi$, так как Π – замкнутое семейство. Итак, $\Pi = \mathit{Spec}\, \mathbb{S}_{T_\Pi}$ и предложение доказано.

Литература

1. Ершов Ю. Л. Спектральная теория полутопологических полурешеток // Сиб. матем. журн. 2003. Т. 44, № 5. С. 1021–1032.

Статья поступила 05.11.2004 г.